

# TRAJECTOIRES QUASI-STATIQUES D'ASSEMBLAGES GRANULAIRES DENSES.

Gaël COMBE et Jean-Noël ROUX

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58 boulevard Lefèbvre  
75732 Paris cedex 15

(Gael.Combe@lcpc.fr, Jean-Noel.Roux@lcpc.fr)

**RÉSUMÉ :** Le comportement mécanique macroscopique des matériaux granulaires, à l'« état solide », dépend-il de leurs caractéristiques dynamiques ? Leur déformation macroscopique est-elle due à la déformation des grains eux-mêmes, ou bien à des réarrangements ? Obtient-on une loi constitutive reliant contrainte et déformation dans la limite des grands systèmes ? La simulation numérique, statique et dynamique, donne des éléments de réponse, qui dépendent du système étudié, dans des cas simples.

**ABSTRACT:** Does 'solid-state' macroscopic granular mechanics depend on dynamical features ? Do macroscopic strains result from deformations of the grains themselves, or from rearrangements ? Is a constitutive law relating stress to strain in the limit of large systems ? Static and dynamic numerical simulations, in simple cases, provide system-dependent answers to those questions.

**MOTS-CLÉS :** loi constitutive, élastoplasticité, fragilité, isostaticité, état caractéristique

## I. INTRODUCTION.

La simulation numérique discrète, grâce à la richesse des informations qu'elle fournit, est un outil particulièrement approprié pour la compréhension des origines microscopiques du comportement mécanique des assemblages granulaires.

Lorsque ces matériaux sont assimilables à des solides, ils sont traditionnellement modélisés par les lois élastoplastiques de la mécanique des sols [1]. Celles-ci, indépendantes du temps physique, font appel à une description quasi-statique du mouvement, dans laquelle le système passe par une séquence d'états d'équilibre. Il est implicite que les caractéristiques dynamiques (inertie, dissipation dans les chocs) ne sont pas pertinentes. Pour un état donné du système (sauf en des situations limites particulières), les incréments de contrainte et de déformation sont supposés se déterminer mutuellement.

Une telle description n'émerge pas facilement de la simulation discrète, dans laquelle les ingrédients dynamiques, indispensables (il faut bien convenir d'une règle pour déplacer les grains qui ne sont pas en équilibre), sont, notamment en ce qui concerne les mécanismes de dissipation dans les collisions multiples, souvent choisis pour la commodité du calcul, au prix de mutilations arbitraires et incontrôlées de la description physique du système.

Nous nous proposons, pour des cas simples, de remédier partiellement à cette difficulté fondamentale en ayant recours, en plus des méthodes dynamiques habituelles – la dynamique moléculaire (DM) [2] ou la dynamique des contacts (DC) [3] – à des calculs statiques avec recherche directe du passage d'un état d'équilibre à un autre. Nous étudions ici des assemblages de disques en dimension 2, préparés dans un état dense sous chargement isotrope (partie II), puis soumis à compression biaxiale (augmentation monotone et graduelle du déviateur) à contrainte contrôlée, pour un modèle de contact d'abord dépourvu (partie III) puis doté (partie IV) de frottement solide. La partie V, après une brève discussion, suggère quelques directions de recherches futures.

## II. PRÉPARATION DES ECHANTILLONS PAR COMPACTAGE.

$n$  disques dont les diamètres sont tirés au hasard suivant la loi uniforme entre les valeurs  $a/2$  et  $a$  sont placés dans un carré dont deux parois sont mobiles, de sorte (figure 1) que les axes étant choisis parallèles à ses côtés seront axes principaux de contrainte et de déformation. Partant d'une configuration initiale peu dense, on applique une pression de confinement isotrope  $P$ . Dans cette étape de compactage, les contacts sont sans frottement, le mouvement est dans un premier temps calculé par DC, puis par la méthode de « dynamique granulaire lubrifiée » [4], qui permet d'obtenir des configurations d'équilibre de grains rigides non frottants avec une bonne précision (interpénétration aux contacts inférieure à  $10^{-7}a$ ). L'ensemble des  $n^*$  disques portant des forces à l'équilibre final forme alors une structure isostatique [5], qui comprend la proportion  $(n^*/n) = 0.945 \pm 0.008$  des grains dans la limite des grands systèmes. On vérifie que les échantillons ainsi formés sont homogènes, à un effet de paroi près, localisé au voisinage du périmètre, compte tenu duquel la compacité dans la limite  $n \rightarrow \infty$  est estimée à  $0.8437 \pm 0.0012$ . Ces configurations sont les points de départ des compressions biaxiales des sections III et IV. Notre choix d'unités assure que  $a = 1$  et  $P = 1$ .

## III. SYSTÈMES SANS FROTTEMENT INTERGRANULAIRE.

En l'absence de frottement, si on parvient à respecter la contrainte d'impénétrabilité avec une précision suffisante, il est possible d'exploiter la propriété d'isostaticité pour calculer les états d'équilibre successifs du système par une prescription, que nous avons appelée méthode géométrique quasi-statique (MGQS), qui ne fait intervenir que les seules données géométriques [5, 6, 7]. En effet, à déviateur  $q$  croissant, un état d'équilibre donné restera stable tant que chacune des forces de contact, que l'on peut calculer à cause de l'isostaticité, reste positive (répulsive). Dès que l'une d'elles s'annule, l'ouverture du contact correspondant, les autres restant fermés, définit la direction des vitesses d'instabilité, mécanisme génériquement unique. L'algorithme de la MGQS [6, 5] consiste à conserver la même prescription, en ouvrant un seul contact à la fois, diminuant ainsi l'énergie potentielle, jusqu'à ce qu'un autre se crée. On poursuit une séquence de tels remplacements dans la liste des contacts jusqu'à obtention d'un nouvel équilibre stable (réactions de contact positives), minimum local de l'énergie potentielle des efforts extérieurs.

Le système étant rigide à l'équilibre, la déformation fonction du déviateur dans la compression biaxiale donne une courbe en escalier (fig. 1), dans laquelle des plages de stabilité  $\delta q$  alternent avec des événements de réarrangement d'amplitudes  $\delta \epsilon$ . L'étude statistique de ces sauts montre que les intervalles  $\delta q$ ,  $\delta \epsilon$  successifs sont indépendants et que les valeurs des  $\delta q$ ,  $\delta \epsilon_{22}$  et  $\delta W = p\delta \epsilon_{11} + (p+q)\delta \epsilon_{22}$  sont équidistribués, du moins tant que  $q/p \leq 0.2$ . Il faut noter que la variation de la distribution des orientations de contact est très faible dans cet intervalle, la texture restant à peu près isotrope. Les champs de déplacements dans les réarrangements ont l'aspect de grands vortex à l'échelle de l'échantillon et la direction des nouveaux contacts semble peu liée aux contraintes déviatoriques. On observe aussi que la loi de probabilité des incréments renormalisés  $\delta \tilde{q} = n^\alpha \delta q$  et  $\delta \tilde{\epsilon}_{22} = n^\beta \delta \epsilon_{22}$ , avec  $\alpha = 1.14 \pm 0.04$  et  $\beta = 2.35 \pm 0.1$  ne dépend pas du nombre de particules  $n$ , que  $\delta \tilde{q}$  est distribué selon une loi exponentielle, tandis que la densité de probabilité des  $\delta \tilde{\epsilon}_{22}$  décroît, pour les grandes valeurs, comme une fonction puissance d'exposant  $-(1+m)$ , avec  $m = 0.46 \pm 0.03$ . Plus le système est grand, plus l'escalier,  $\epsilon_{22}$  fonction de  $q$ , se compose d'une multitude de petites marches, dont le nombre  $M$  entre 0 et  $q$  sera donc d'ordre  $qn^\alpha$ . Toutefois, la distribution des incréments de déformation n'admet

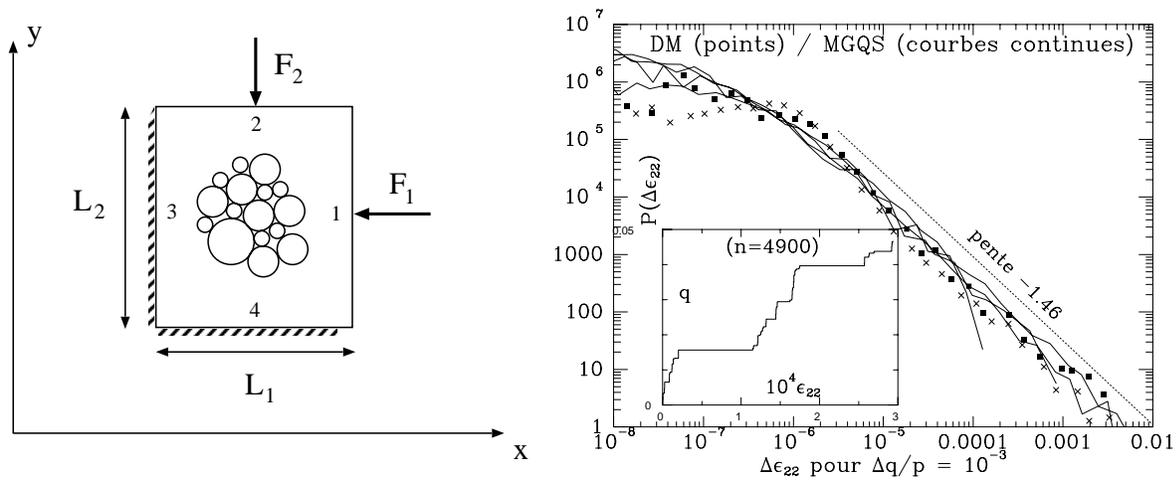


FIG. 1 – Distribution statistique, à droite, des incréments de déformation  $\Delta\epsilon_{22}$  correspondant à une valeur imposée  $\Delta q = 10^{-3}p$ , dans l'expérience biaxiale schématisée à gauche. Les résultats de DM ( $n=1024$  et  $3025$ ) comparés à ceux de MGQS ( $n=1024, 1936, 3025,$  et  $4900$ ), pour lesquels on doit agréger plusieurs réarrangements successifs pour obtenir  $\Delta q = 10^{-3}p$ , sont statistiquement indiscernables. L'insert montre la courbe en escalier  $\epsilon_{22}(q)$ , ou  $q(\epsilon_{22})$ , dans un échantillon de 4900 disques (MGQS).

pas de moyenne, et c'est un théorème «de la limite centrale » généralisé qui s'applique dans ce cas [8]. Il stipule que pour  $M$  assez grand  $\epsilon_{22}$  varie avec  $M$  comme un processus de Lévy à accroissements positifs de paramètre  $m$ . Il en est de même pour l'évolution de  $\epsilon_{22}$  en fonction de  $q$ , dans laquelle  $n$  ne figure plus pourvu que les différents exposants satisfassent  $\alpha = m\beta$ , ce qui est compatible avec nos résultats.

La courbe en escalier  $\epsilon_{22}(q)$  de l'expérience biaxiale, dans la limite  $n \rightarrow \infty$  ne tend donc pas vers une loi limite déterministe (courbe lisse unique). Quel que soit  $n$ , l'évolution de la déformation avec le déviateur présente toujours des sauts de toutes tailles, comme la trajectoire d'un processus de Lévy, et, bien que  $\epsilon_{22}$  soit typiquement d'ordre  $q^{1/m}$ , reste essentiellement imprévisible [7].

Nous avons comparé les résultats de MGQS à ceux que l'on obtient par DM en imposant des incréments successifs  $\Delta q = 10^{-3}p$  constants, puis en mesurant, une fois l'équilibre atteint, les déformations. La loi de contact, pour la DM, est élastique linéaire et unilatérale avec une raideur égale à  $10^5$  (un surcroît de compression isotrope initiale est alors nécessaire, qui conduit à un état d'équilibre sous chargement isotrope avec un faible degré d'hyperstaticité, environ  $4 \cdot 10^{-3}n$ ). On vérifie alors que la distribution des incréments  $\Delta\epsilon$  correspondants est la même pour DM que pour MGQS, indépendante de  $n$ , et sous forme de loi de puissance (exposant  $-(1+m)$ ) pour les grandes valeurs. Ceci confirme la nature stochastique de la loi  $\epsilon(q)$ , ainsi que l'absence d'effet d'échelle, et indique que la statistique de Lévy à l'échelle macroscopique n'est pas sensible aux détails de la dynamique, non plus qu'à une rigidité finie dans les contacts. La trajectoire du système dans l'espace des configuration, constituée d'une multitude de sauts entre états d'équilibre isolés, n'est pas *quasi-statique au sens strict* d'une suite continue d'états d'équilibre mais l'insensibilité de ses propriétés statistiques, macroscopiquement pertinentes, aux mécanismes dynamiques qui régissent les sauts entre états d'équilibre d'une séquence discrète permet de la qualifier de *quasi-statique au sens large*. Signalons par ailleurs que la compression biaxiale par DM à vitesse de déformation contrôlée fournit une courbe  $q(\epsilon)$  extrêmement bruitée (dont il est malaisé d'estimer, au niveau statistique, la sensibilité aux paramètres dynamiques choisis).

#### IV. SYSTÈMES AVEC FROTTEMENT INTERGRANULAIRE.

A partir des mêmes états initiaux, les tests biaxiaux ont été simulés par dynamique moléculaire, en prenant cette fois un coefficient de frottement intergranulaire  $\mu$  non nul, égal à 0.1 et à 0.5, pour  $n = 1024$  et  $3025$ , les raideurs normale et tangentielle valant respectivement  $K_N = 10^5$  et  $K_T = 5 \times 10^4$ . L'évolution de ces échantillons à  $q/p$  croissant peut aussi être obtenue par une méthode purement statique, sans introduire d'inertie ni de mécanisme de dissipation, aussi longtemps que la trajectoire dans l'espace des configurations reste quasi-statique au sens strict. Mettant en oeuvre la méthode développée par N. Bourada et X. Chateau [9], analogue aux calculs aux éléments finis élastoplastiques, on travaille alors avec le seul réseau des contacts initialement présents, assemblage fixé d'éléments rhéologiques des types ressort et patin (avec condition de Coulomb). Une telle démarche est possible jusqu'à ce que la matrice tangente élastoplastique devienne singulière. Il y a alors instabilité, un saut sépare la dernière configuration du prochain état d'équilibre qu'il n'est plus possible d'obtenir sans définition d'une dynamique.

A la différence du cas  $\mu = 0$ , l'intervalle  $0 \leq q \leq q_1$  des déviateurs supportés, en chargement monotone, par le réseau des contacts initialement présents n'est pas nul dans la limite thermodynamique  $n \rightarrow +\infty$ . Nous avons ainsi estimé cette plage de stabilité à  $q_1 = 1.13 \pm 0.08$  pour  $\mu = 0.5$  (environ 0.6 pour  $\mu = 0.1$ ). La limite  $q_1$  ne doit pas être confondue avec celle du comportement purement élastique, le premier glissement intervenant à une valeur  $q_0$  beaucoup plus faible et qui, elle, tend vers zéro pour  $n \rightarrow +\infty$  (nous l'avons vérifié pour  $n$  allant jusqu'à 9000). Il est remarquable (vu le caractère non-associé de la loi de contact) que l'on obtienne, non pas seulement en moyenne, mais échantillon par échantillon, les mêmes états (déplacements, statuts des contacts, etc...) par la dynamique moléculaire et par la méthode statique, aussi longtemps que cette dernière est praticable. L'identité des courbes contrainte-déformation est illustrée par la fig. 2. Dans ce régime, pour  $q_0 \leq q \leq q_1$ , on peut conclure qu'une loi macroscopique, avec une courbe  $q(\epsilon_{22})$  lisse et bien définie, est approchée pour  $n$  assez grand. En effet, on observe un écart-type assez faible (fig. 2) autour de la moyenne sur les échantillons à  $\epsilon_{22}$  fixé, et dont la décroissance entre  $n = 1024$  et  $n = 3025$  est compatible avec une régression complète des fluctuations pour  $n \rightarrow \infty$ . Les déformations plastiques sont alors contenues,  $\epsilon$  est (pour des  $K_N$  assez grands, de sorte que la variations de la densité de contacts est négligeable) de la forme  $\frac{pa}{K_N} f(\mu, K_T/K_N, q/p)$ , où la fonction  $f$  par rapport à son troisième argument. C'est dans cet intervalle que se situe l'« état caractéristique » [10], pour lequel le sens de variation de la déformation volumique  $\epsilon_v$  s'inverse. Pour  $q \geq q_1$ , le système n'est plus dans un régime quasi-statique au sens strict, c'est la géométrie de l'assemblage granulaire (notamment les distances entre grains voisins) qui fixe l'échelle des déformations, comme en l'absence de frottement, et non plus la raideur des contacts. Les données de la figure 2 sont limitées à  $\epsilon_{22} \leq 2.10^{-4}$ . La dilatance  $d\epsilon_v/d\epsilon_{22}$  reste approximativement constante pour  $10^{-4} \leq \epsilon_{22} \leq 2.10^{-4}$ , égale à  $0.60 \pm 0.04$  pour  $\mu = 0.5$  et  $0.13 \pm 0.02$  pour  $\mu = 0.1$ . A cette échelle de déformation,  $q$  semble proche d'un maximum. Qu'en serait-il pour  $\epsilon_{22}$  plus grand ? La poursuite des simulations, à vitesse de déformation constante, (insert sur la figure de gauche), jusqu'à  $\epsilon_{22} \sim 10^{-1}$ , indique qu'il est possible d'observer des niveaux de déviateurs supérieurs (jusqu'à environ 1.5) tandis que les courbes deviennent très bruitées, comme dans le cas sans frottement. Pour  $\epsilon_{22} \sim 10^{-4}$ , les réarrangements de grande amplitude, événements rares, ne se sont pas encore manifestés dans les systèmes de quelques milliers de grains. L'étude statistique, en cours, de résultats obtenus par imposition d'incrément de déviateur, permettra de tester plus précisément ce que nous sommes enclins à inférer de l'analogie avec le cas des grains non frottants : que la validité

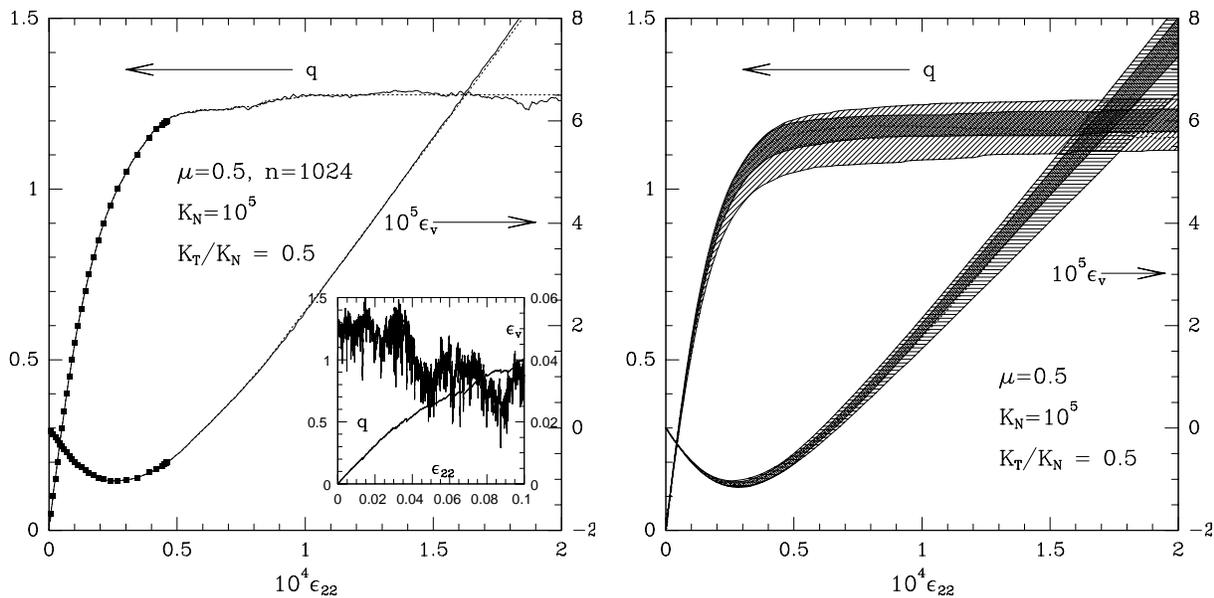


FIG. 2 – Déviateur  $q$  et déformation volumique  $\epsilon_v$  fonction de  $\epsilon_{22}$ . A gauche on présente pour un système de 1024 disques les résultats de la méthode statique (points) et de DM, à  $q$  contrôlé (pointillés) et à  $\dot{\epsilon}_{22}$  constant (courbe continue). L'insert montre  $q$  et  $\epsilon_v$  fonctions de  $\epsilon_{22}$  ( $\dot{\epsilon}_{22}$  constant) jusqu'à  $\epsilon_{22} = 0.1$ . Noter la persistance de la dilatance et le niveau de bruit sur le déviateur. A droite sont grisées les zones s'étendant sur un écart-type de part et d'autres des courbes moyennes (à  $q$  contrôlé) pour  $\epsilon_{22}$  donné, sur 26 échantillons à  $n = 1024$  et à  $n = 3025$  (hachures plus serrées). Les moyennes pour  $\dot{\epsilon}_{22}$  contrôlé figurent en pointillés.

de lois constitutives de type élastoplastique se limite au domaine strictement quasi-statique, à l'exclusion du régime de réarrangements. Une différence possible, cependant, avec le cas sans frottement est que la déformation volumique pourrait rester, sous chargement monotone, fonction de la déformation axiale, avec une dilatance bien définie. Une évolution plus systématique de la densité ou de la texture avec le déviateur interdirait de raisonner sur des incréments équidistribués.

## V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Nos simulations numériques ont permis d'identifier deux régimes de comportement mécanique des assemblages granulaires proches de l'équilibre, qui se distinguent par l'origine microscopique de la déformation. Un *régime strictement quasi-statique* (A) est observé, dans une certaine plage de déviateur, dans le cas de milieux très denses, avec frottement intergranulaire, préparés dans un état isotrope. On trouve alors des lois constitutives incrémentales de type élasto-plastique avec écrouissage (le domaine purement élastique étant inexistant), incréments de contrainte et de déformation se déterminant mutuellement pour un état donné. Dans le *régime de réarrangements* (B), en revanche, la déformation est d'origine géométrique. Les assemblages de grains non frottants sont toujours dans ce cas. Les expériences numériques à incréments de contrainte imposés donnent alors des trajectoires quasi-statiques au sens large (statistiques indépendantes de la dynamique). Il n'y a pas de loi constitutive— conclusion reposant sur une étude statistique précise dans le cas sans frottement, et plus spéculative, en l'attente de calculs complémentaires, pour les systèmes frottants hors du régime A. Si elle se vérifie alors, il est normal que les essais de laboratoire dans les conditions du régime B donnent une réponse mécanique

liée au dispositif expérimental et non pas seulement au matériau. Il se peut que l'appareil ou le dispositif d'asservissement « lisse » le bruit, ou impose une certaine fréquence caractéristique de fluctuations. Il est tentant d'attribuer différents aspects « non classiques » des réponses mécaniques observées en laboratoire, comme la persistance d'un certain niveau de fluctuation [11] ou le « fluage » [12] des sables, au régime de réarrangement B, qui rend problématique la prise de moyenne sur les déformations et parfois lente et incertaine l'approche de l'équilibre. On sait, d'autre part [10], que l'application de sollicitations cycliques conduit à l'acomodation ou au rochet selon la position de l'état de contrainte moyen par rapport à l'état caractéristique. Il est donc normal que le domaine subcaractéristique soit intérieur au domaine A, et on conçoit bien que le régime B soit propice à l'accumulation irréversible de déformations. Il nous semble prometteur d'une part d'explorer, par la simulation numérique, la limite entre les deux régimes de déformation, pour différents matériaux, en variant modes de préparation et types de sollicitations (monotones ou cycliques); d'autre part de mener à bien une réflexion plus approfondie sur les mécanismes d'instabilité dans les réseaux de contacts intergranulaires élastoplastiques.

## Références

1. D. M. Wood. *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge University Press, 1990.
2. D. E. Wolf, *Modelling and Computer Simulation of Granular Media* in K. H. Hoffmann et M. Schreiber (eds.), *Computational Physics*, pp. 64–95, Springer, 1996
3. M. Jean et J.-J. Moreau *Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections* In A. Curnier (ed.), *Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium*, pp. 31–48 Presses Polytechniques Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.
4. S. Ouaguenouni et J.-N. Roux. *Force distribution in frictionless granular packings at rigidity threshold* Europhysics Letters, 39:117–122, 1997.
5. J.-N. Roux. *Geometric origin of mechanical properties of granular materials* Physical Review E, 61:6802–6836, 2000.
6. G. Combe et J.-N. Roux. In *Actes du 14ème Congrès Français de Mécanique (1999)*, CD-ROM publié par l'ENSAE-Toulouse, ISBN2-84088-040-7.
7. G. Combe et J.-N. Roux. *Strain versus stress in a model granular material: a devil's staircase* soumis à Physical Review Letters
8. J.-P. Bouchaud et A. Georges. *Physics Reports*, 195:127, 1990.
9. Narimane Bourada-Benyamina. *Etude du comportement des milieux granulaires par homogénéisation périodique*. Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
10. M.-P. Luong. *Stress-strain aspects of cohesionless soils under cyclic and transient loading* In *Proc. Int. Symp. on Soil Under Cyclic and Transient Loading*, pages 315–324. Balkema, 1980.
11. P. Evesque, W. Meftah, et J. Biarez. *Mise en évidence de variations brutales et d'évolutions quasi-discontinues dans les courbes contrainte-déformation d'un milieu granulaire bidimensionnel de rouleaux* Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (série II), 316:321–327, 1993.
12. H. di Benedetto, E. Ibraim et B. Cazacliu, *Time-dependent behaviour of sand* in *Proc. Int. Symp. on Prefailure Deformation Characteristics of Geomaterials*, Turin (1999)