

TRAJECTOIRES QUASI-STATIQUES D'ASSEMBLAGES GRANULAIRES.

Gaël COMBE, Jean-Noël ROUX

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées,
58 boulevard Lefèbvre, 75732 Paris cedex 15, France

RESUME :

On montre que les assemblages de grains rigides et non frottants constituent génériquement des structures isostatiques. Ceci permet de prédire leur évolution, alternance de phases d'équilibre et de réarrangements, lorsque le chargement est modifié, sans introduire aucun paramètre dynamique. Exploitant numériquement ces propriétés dans des simulations de tests biaxiaux, on retrouve des comportements macroscopiques élastoplastiques, ce qui témoigne de leur origine géométrique.

ABSTRACT:

A generic isostaticity property of assemblies of rigid, frictionless grains is proved. This enables a prediction of their evolution (phases of rest and rearrangements), as the load is altered, without relying on any dynamical model. Numerically implementing these ideas in simulations of biaxial tests, we observe macroscopic features of elastoplasticity, thus highlighting its geometric origin.

MOTS-CLES :

Matériau granulaire, simulation numérique, isostatique, élastoplasticité, quasi-statique.

1 INTRODUCTION.

La compréhension des origines microscopiques, à l'échelle du grain, des comportements mécaniques macroscopiques des matériaux granulaires, en régime statique ou quasi-statique, fait actuellement l'objet d'un important effort de recherche, aussi bien dans les communautés des mécaniciens du solide et des mécaniciens des sols (Petit & al(1998); Behringer & al(1997)) que dans celle des physiciens de la matière condensée (Behringer & al(1997); Herrmann & al(1997); Wolf & al(1996)). La prédiction des comportements macroscopiques est rendue difficile par la grande hétérogénéité de la distribution spatiale des forces, qui implique des échelles de longueur sensiblement supérieures au diamètre des grains, et par l'absence de régularité des lois de contact (unilatéralité, frottement). De par la richesse des informations qu'elle fournit, à l'échelle granulaire, sur les mécanismes de déformation et sur la répartition des efforts, la simulation numérique est un outil essentiel dans ces investigations. Différentes méthodes ont été développées, telles que la « dynamique moléculaire » (encore appelée « méthode des éléments distincts », Luding(1997)) ou la « dynamique des contacts » (Jean & Moreau(1992)).

Malgré ses succès, parmi lesquels on peut citer la simulation de la réponse macroscopique du matériau dans les essais de laboratoire, ou l'étude de la statistique des forces (Radjai & al(1996),

Ouaguenouni & al(1997)), l'approche numérique se trouve toujours confrontée à au moins deux sérieuses difficultés.

La première est d'ordre technique : il s'avère souvent délicat d'obtenir des états d'équilibre avec une précision suffisante pour que la topologie du réseau des contacts soit totalement déterminée. On souhaiterait pourtant y parvenir afin de bien caractériser le passage, suite à un petit incrément de chargement, d'un équilibre à un équilibre voisin. Même en étant moins exigeant, la simulation de grands systèmes nécessite toujours de longues heures de calcul, et il est rare que les résultats publiés portent sur plus de quelques systèmes de quelques milliers de grains. C'est une sérieuse limite aux études statistiques qu'il est envisageable d'entreprendre.

Un second problème, plus fondamental, est lié à la mauvaise connaissance des lois qui régissent la dynamique des grains. Les dynamiques mises en œuvre dans les différentes méthodes de simulation contiennent toutes des ingrédients arbitraires, dont le choix résulte de compromis entre le «réalisme» du modèle et la commodité des calculs. Il faut espérer que les comportements macroscopiques qui résultent de telles hypothèses sont proches de ceux des matériaux réels, ce que des comparaisons directes avec l'expérience ont tenté de vérifier (Daudon & al(1997)).

Dans ce contexte, il est intéressant de pouvoir exhiber une trajectoire quasi-statique du système dans l'espace des configurations qui soit indépendante de tout modèle précis pour l'inertie et la dissipation, en arguant que dans une certaine limite ces aspects dynamiques sont peu pertinents. C'est une telle approche que nous présentons ici, dans le cas des assemblages bidimensionnels de disques rigides et sans frottement. Nous exploitons une propriété d'isostaticité que possèdent, génériquement, de tels systèmes (Ouaguenouni & al(1996); Moukarzel (1998)), ainsi qu'il est montré dans la section 2. La partie 3 présente les résultats d'une première étude numérique, sur ce principe, d'un test biaxial en dimension 2.

2 ISOSTATICITE DU PROBLEME. CONSEQUENCES.

2.1 Notations et définitions.

Nous traitons ici du cas de grains circulaires en dimension 2. Les propriétés énoncées s'étendent sans difficulté à la dimension 3 et aux grains de forme quelconque. Nous supposons également, par souci de simplicité, que le chargement et les conditions aux limites peuvent être décrits par la donnée de forces extérieures appliquées à certaines particules, tandis que certaines composantes des vitesses de quelques objets (les parois, par exemple, que l'on traite comme des grains) peuvent être fixées nulles. Enfin, s'agissant de disques non frottants, on ignorera leurs rotations.

Considérons donc une telle collection de n objets (tous des disques, à l'exception éventuelle de quelques parois), en équilibre sous l'action de forces extérieures données. L'ensemble des degrés de liberté cinématiques forme un espace vectoriel \mathcal{V} dont la dimension N_f est égale à $2n - l$, où l , de l'ordre de l'unité, prend en compte les conditions aux limites. A \mathcal{V} on peut associer son espace dual, qui est l'espace des forces extérieures \mathcal{F} , de même dimension. Il est commode de numéroter les degrés de liberté de 1 à N_f et d'écrire $(v_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_f}$ pour désigner un vecteur de \mathcal{V} , et on adoptera une notation similaire, $(F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_f}$ pour les éléments de \mathcal{F} .

Convenons de repérer les contacts entre grains, au nombre de N , soit par un indice l , $1 \leq l \leq N$, soit par la paire d'indices i, j , où $1 \leq i, j \leq n$ des deux grains en contact. La force transmise dans le contact i, j est, par hypothèse, portée par le vecteur unitaire normal \mathbf{n}_{ij} , qui pointe du centre de i vers le centre de j . Son amplitude, notée f_{ij} , sera conventionnellement comptée positive si les deux grains se repoussent. Ces forces de contact sont des forces intérieures, qui doivent équilibrer le chargement extérieurement imposé. Cette condition prend la forme de

relations linéaires :

$$(1 \leq \mu \leq N_f) \quad \sum_{l=1}^N H_{\mu l} f_l = F_{\mu}^{ext}, \quad (1)$$

ce qui définit un opérateur linéaire $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{F}$. Le noyau S_0 de H est l'espace des forces de contact auto-équilibrées, dont la dimension, que l'on notera h , est le *degré d'hyperstaticité* de la structure.

Notons δV_{ij} la vitesse relative normale dans le contact i, j , comptée positivement lorsque les deux grains se rapprochent. Les valeurs possibles des N -uplets $(\delta V_l)_{1 \leq l \leq N}$ dans \mathbb{R}^N , ne sont pas quelconques, mais définissent un sous-espace vectoriel C , qui n'est autre que l'image de l'opérateur linéaire $G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui associe, aux vitesses des grains, les vitesses relatives normales. Le noyau de G , que nous notons M , est constitué des vecteurs-vitesses tels que $\delta V_l = 0$ pour tout l , mouvements libres ou « mécanismes » de la structure. Sa dimension k est le nombre de tels mécanismes indépendants.

Le théorème des puissances virtuelles s'énonce alors ainsi. Si les $(f_l)_{1 \leq l \leq N}$ est un N -uplet de forces de contact dont l'image par H est $(F_{\mu}^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_f} \in \mathcal{F}$, et si $(v_{\mu})_{1 \leq \mu \leq N_f}$ est un vecteur-vitesse de \mathcal{V} dont l'image par G est $(\delta V_l)_{1 \leq l \leq N}$, alors :

$$\sum_{l=1}^N f_l \delta V_l = \sum_{\mu=1}^{N_f} F_{\mu}^{ext} v_{\mu}. \quad (2)$$

Il en résulte immédiatement que H est le transposé de $G : H = G^T$. Par conséquent, S_0 et C forment une paire de supplémentaires orthogonaux, on a $C = S_0^{\perp}$ dans \mathbb{R}^N . Par ailleurs, l'espace des forces extérieures que la structure est capable de supporter est l'image de $H = G^T$, et donc l'orthogonal de M dans \mathcal{F} . On notera enfin que des définitions et propriétés précédentes découle la relation générale $N_f + h = N + k$.

2.2 Isostaticité.

Nous exploitons dans la suite la propriété suivante des systèmes de grains non frottants et rigides dans lesquels les seules forces intérieures sont transmises aux contacts : génériquement, c'est-à-dire avec une probabilité égale à 1, sachant que tailles et formes des grains comportent une part d'aléa, le degré d'hyperstaticité de la structure ainsi formée est nul. Pour l'établir, supposons que, dans une configuration précédente, chacun des grains ait subi une petite modification de sa taille ou de sa forme. Notons, pour fixer les idées, δR_i le changement du rayon du grain i , dans le cas des disques. Alors les positions finales, dans la configuration actuelle, de tous les grains, sont des fonctions continues de ces δR_i . Sauf en des points isolés de l'espace des configurations, on peut donc considérer qu'il existe une plage de petites variations δR_i pour laquelle le processus physique qui amène à la configuration actuelle conduit à une liste des contacts inchangée. Ces contacts devant tous pouvoir être maintenus alors que les distances entre les centres des disques en contact changent, des vitesses relatives normales choisies quelconques doivent être compatibles. Ceci signifie que l'on doit avoir $S_0 = \{0\}$ et $h = 0$. L'existence d'un système de forces auto-équilibrées $(\gamma_l)_{1 \leq l \leq N}$ dans les contacts imposerait la condition de compatibilité $\sum_{1 \leq l \leq N} \gamma_l \delta V_l = 0$ qui ne saurait être satisfaite pour des δV_l quelconques. En étendant cette relation, dans le cadre de l'hypothèse classique des petits mouvements, aux déplacements, sous la forme $\sum_{1 \leq l \leq N} \gamma_l \delta h_l = 0$, on obtient une condition que les petites variations d'interstices δh_l , incontrôlées, que l'on doit considérer comme aléatoires, ne satisfont qu'avec une probabilité nulle.

Par ailleurs, il faut bien que la structure soit apte à supporter le chargement qu'on lui impose, d'où la condition $(F_{\mu}^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_f} \perp M$, qui, jointe au résultat $h = 0$, signifie que *le problème*

est isostatique. En pratique, on constate que cette condition d'orthogonalité, sauf dans les cas particuliers de structures ordonnées, s'exprime génériquement ainsi : en se restreignant, ce que nous convenons de faire dans la suite, aux grains et aux contacts qui portent des forces non nulles (dits *actifs*) on a alors $k = 0$ et *la structure est isostatique* (le problème est isostatique quelles que soient les forces extérieures appliquées aux grains *actifs*).

2.3 Détermination des vitesses dans les phases de mouvement. Cas du test biaxial.

On suppose dorénavant que les contacts ne peuvent transmettre que des forces de compression, c'est-à-dire qu'ils satisfont à la «condition de Signorini». Dans le cas de la simulation d'un test biaxial, schématisé sur la figure 1, on peut exploiter la propriété d'isostaticité pour calculer des trajectoires quasi-statiques comme suit.

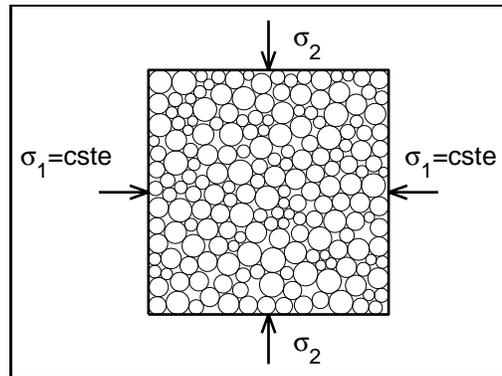


FIG. 1 – Simulation d'un test biaxial - Géométrie.

Partant d'une situation d'équilibre obtenue par compression isotrope, par une méthode de simulation dynamique, on modifie ensuite le chargement, qui dépend des deux paramètres σ_1 et σ_2 , par petits incréments. En conservant les axes principaux de contraintes parallèles aux parois de l'échantillon, qui garde une forme rectangulaire, on maintient l'une des contraintes principales, σ_1 , constante tandis que l'autre, σ_2 varie à partir de sa valeur initiale égale à σ_1 . La structure formée par les contacts actifs dans l'état initial étant isostatique, il existe des coefficients α_l et β_l , entièrement déterminés, pour chaque contact l , par la géométrie de l'assemblage, tels que les forces de contact $f_l = \alpha_l \sigma_1 + \beta_l (\sigma_2 - \sigma_1)$ équilibrent les forces extérieures pour σ_1 et σ_2 quelconques.

Toutefois, les conditions $f_l \geq 0$ ne seront satisfaites que dans un intervalle de variation de σ_2 limité. La borne supérieure en est atteinte lorsque $f_{l_0} = 0$ pour un certain l_0 , qui, parmi les contacts qui ont un coefficient β_l négatifs, minimise le rapport $\frac{-\alpha_l}{\beta_l}$. Dès que $\sigma_2 - \sigma_1$ atteint la limite $-\frac{\beta_{l_0} \sigma_1}{\alpha_{l_0}}$, les grains doivent se déplacer.

Leurs vitesses initiales satisfont à 2 conditions : d'une part $\delta V_l \leq 0$ pour chaque l ; d'autre part la puissance des efforts extérieurs est positive. En notant que ceci peut s'écrire $\sum_{1 \leq l \leq N} f_l \delta V_l \geq 0$, on en déduit que la direction des vitesses initiales est entièrement déterminée par la condition que seul le contact l_0 s'ouvre.

En maintenant cette condition dans la suite du mouvement, on déplace alors les grains jusqu'à création d'un nouveau contact actif. Si la nouvelle structure des grains en contact, qui est isostatique, satisfait aux contraintes $f_l \geq 0$, on a alors trouvé le nouvel état d'équilibre après incrémentation de chargement et on retrouve une situation d'équilibre comme au départ. Dans le cas

contraire, on poursuit la phase de mouvement, en ouvrant le contact qui porte la plus grande traction, jusqu'à obtention d'un nouvel d'équilibre.

3 RESULTATS DE SIMULATIONS.

On présente ici des résultats obtenus par application de la méthode décrite au paragraphe 2.3. Deux tailles d'échantillons, 1936 et 4900 particules, sont traitées dans cette étude préliminaire. Rappelons que les parois, de même que les grains circulaires, sont rigides et non frottantes, et que les essais biaxiaux sont contrôlés en forces. Les diamètres des grains sont distribués suivant une loi uniforme entre 2 valeurs d_1 et $d_2 = 2d_1$.

Les figures (Fig.2, Fig.3) montrent l'évolution de la déformation axiale avec la contrainte imposée σ_2 dans le cas d'un système de 4900 disques. Les déformations, dans de tels assemblages de grains rigides, résultent uniquement des réarrangements de la structure, qui se traduisent par des paliers horizontaux sur ces courbes en escalier, tandis que les parties verticales correspondent aux plages de valeurs de σ_2 supportées par la même structure rigide. On notera la petitesse de ces intervalles de chargement supportés sans réarrangement. Leur diminution quand la taille du système augmente permet de conjecturer, ce que des campagnes de calculs plus systématiques devraient confirmer, que la variation en escalier se rapproche, à mesure que la taille du système augmente, d'une courbe régulière. Cette tendance est apparente sur la figure 4 qui présente la distribution statistique des incréments de contrainte entre 2 réarrangements successifs, pour les deux tailles de systèmes étudiées. La figure 5 montre un comportement analogue pour les amplitudes des sauts de déformation, entre deux états d'équilibre successifs. Cette statistique est fondée sur un ensemble de 644 valeurs pour les empilements de 1936 grains et sur 465 valeurs pour les empilements de 4900 grains.

On a également représenté, sur les figures 2 et 3, l'effet d'une décharge initiée à différentes étapes du chargement. Il apparaît clairement que ces systèmes, bien que dépourvus de frottement dans les contacts intergranulaires, sont dotés, grâce à l'absence de réversibilité de la séquence des équilibres et des réarrangements, d'un mécanisme de «frottement interne». Ceci est conforme à des résultats de simulations numériques obtenus par les méthodes classiques (Oger & al(1998)). D'autre part, la figure 3 illustre qualitativement l'augmentation relative de la partie irréversible de la déformation avec l'amplitude du cycle charge-décharge. Dans une étude plus poussée de la limite des grands systèmes, il conviendra de quantifier cette croissance de l'hystérèse avec l'intervalle de contrainte parcouru.

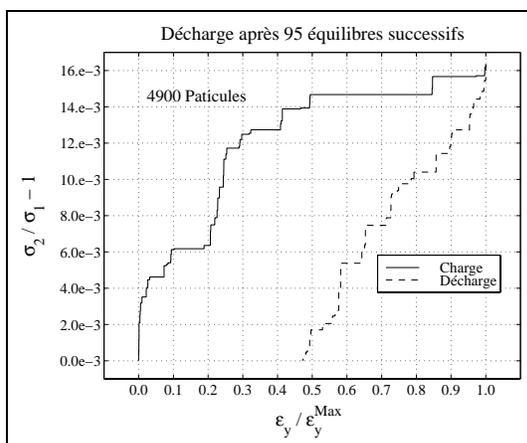


FIG. 2 – Charge sur 95 états d'équilibre puis décharge.

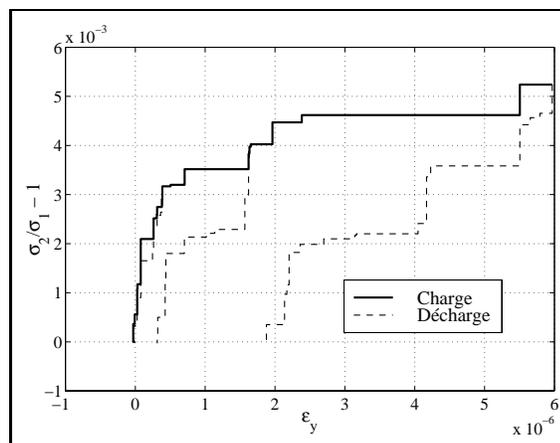


FIG. 3 – Charge et décharge sur 10, 15 et 20 états d'équilibre.

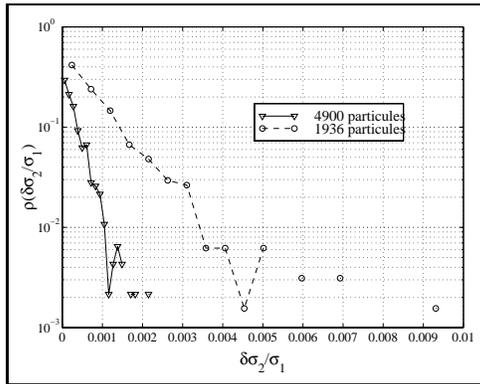


FIG. 4 – Distribution statistique des valeurs des incréments de chargement.

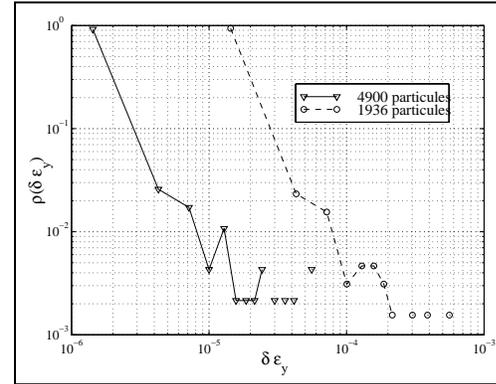


FIG. 5 – Distribution statistique des valeurs des incréments de déformation.

4 CONCLUSIONS.

L'isostaticité générique des systèmes de grains rigides et non frottants permet de calculer la trajectoire d'un tel système, dans l'espace des configurations, sous l'effet d'une variation de chargement, à partir des seules données géométriques. Cette évolution est constituée d'une alternance de phases d'équilibre et de phases de réarrangement. Ces dernières s'accompagnent de déformations partiellement irréversibles. Nous avons jeté les bases d'une nouvelle méthode de simulation qui semble particulièrement prometteuse pour l'étude fine des mécanismes microscopiques de la plasticité et de l'élastoplasticité dans les matériaux granulaires.

REFERENCES

- BEHRINGER R.P., JENKINS J.T.;1997, *Powders & Grains 97*, Durham, North Carolina.
- DAUDON. D., LANIER J., JEAN M.;1997, A micro mechanical comparison between experimental results and numerical simulation of a biaxial test on 2D granular material, *Powders & Grains 97*, pp. 219-222.
- HERRMANN H.J., HOVI J.-P., LUDING S.; 1997, *Physics of Dry Granular Media*, Cargèse.
- JEAN M., MOREAU J.-J.;1992, Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collections, *Proc. Contact Mechanics Int.Symp.*, pp.31-48.
- LUDING S.;1997, Stress distribution in static two-dimensional granular model media in the absence of friction, *Physical review letters*, Vol. 55(4), pp.4720-4729.
- MOUKARZEL C.;1998, Isostatic phase transition and instability in stiff granular materials, *Physical review letters*, Vol. 81, pp. 1634-1638.
- OGER L., SAVAGE S.B., CORRIVEAU D., SAYED M., Yield and deformation of an assembly of disks subjected to a deviatoric stress loading, *Mechanics of Materials*, Vol. 27, pp. 189-210.
- OUAGUENOUNI S., ROUX J.-N.;1997, Forces distribution in frictionless granular packing at rigidity threshold, *Europhysics letters*, 39(2), pp. 117-122.
- OUAGUENOUNI S., ROUX J.-N.;1996, Arching without friction: a simple model, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pp. 187-191.
- PETIT C., PIJAUDIER-CABOT G., REYNOUARD J.-M.;1998, Réseau de laboratoire GEO, *Ouvrages géomatériaux et interactions - modélisations multi-échelles*.
- RADJAI F., JEAN M., MOREAU J.-J., ROUX S.;1996, Forces distributions in dense two-dimensional granular systems, *Physical review letters*, Vol. 77(2), pp.274-277.
- WOLF D.E., GRASSBERGER P.;1996, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, HLRZ, Forschungszentrum Jülich, Germany.